Einführung in die Finite-Elemente-Methode

Prof. Dr.-Ing. Andreas Baral

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist eine hochentwickelte numerische Analysetechnik, die in verschiedenen Ingenieurdisziplinen eingesetzt wird, um das Verhalten von komplexen Strukturen unter unterschiedlichen Belastungen zu untersuchen. Diese Methode ermöglicht es Ingenieuren, genauere Modelle von Strukturen zu erstellen und detaillierte Simulationen durchzuführen, um entscheidende physikalische Größen wie beispielsweise mechanische Spannungen, Verformungen, Temperaturen und magnetische Flussdichten zu analysieren.

In diesem Beitrag werden erste Einblicke in die FE-Analyse im mechanischen und elektromagnetischen Bereich gegeben. Nach der Vorstellung zweier sehr unterschiedlicher Anwendungen wird am Beispiel eines einfachen magnetischen Kreises gezeigt, wie mithilfe kostenloser Open-Source-Programme der Einstieg in die FE-Analyse möglich ist.

Anwendungsbeispiele

FEM als Basis der mechanischen Eigenfrequenzberechnung

Als anschauliches mechanisches Beispiel soll die Ermittlung der Eigenfrequenz einer Welle erläutert werden. Hierbei wird die Welle in kleine Massescheiben zerlegt. Die einzelnen Massescheiben sind jeweils mit ihrem Nachbarn durch ein Federelement gekoppelt. Auch bei dieser Methode wird das Grundprinzip der finiten Elemente verwendet. Ein großes Bauteil, die Antriebswelle, wird in viele kleine Elemente aufgeteilt. Jedes Element hat eine Verbindung zu seinem Nachbarn über Koppelelemente wie beispielsweise Feder- und Dämpfungselemente. Daraus ergibt sich ein Differenzialgleichungssystem, dessen Lösung die Verschiebung der einzelnen Knoten beschreibt.

Modellierung einer elastischen Welle.

In **Bild 1** ist ein Messaufbau zur Frequenzanalyse einer Antriebswelle dargestellt. Die Welle ist an zwei weichen Federn aufgehängt. Mithilfe eines Impulshammers wird die Welle zu Schwingungen angeregt und ein montierter Beschleunigungsaufnehmer ermittelt die Eigenschwingungen der Antriebswelle.

Die dargestellte Welle (Bild 1) ist mithilfe vieler kleiner aneinandergereihter Balkenelemente gut modellierbar. Jedes Balkenelement hat die Freiheitsgrade Durchbiegung, Verdrehung, Verschiebung und dies jeweils in den drei Koordinatenrichtungen x, y, z. Die Berechnung der Eigenwerte des Differenzialgleichungssystems entspricht den Eigenfrequenzen.

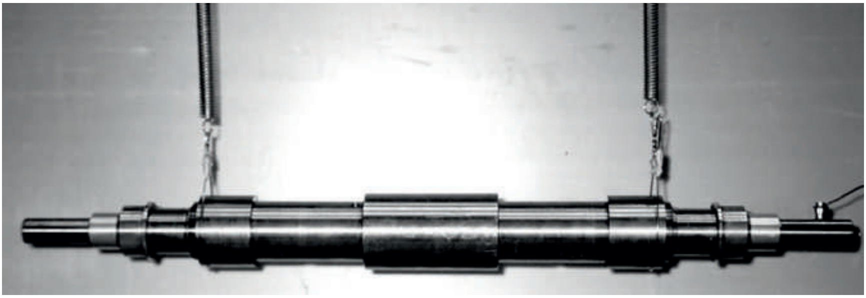

Bild 1: Elastisch aufgehängte Motorwelle

Um die Vorgehensweise der Modellierung zu verdeutlichen, wird als Beispiel eine einfache eindimensionale Darstellung, bestehend aus Masseelementen und einer Federverbindung, verwendet.

Eindimensionale Modellierung

Das einfache Modell einer eingespannten Welle besteht aus drei über Federn gekoppelten Masseelementen. Die Welle ist beispielsweise über weiche Federn k0 aufgehängt (**Bild 2**).

Durch Einbringung einer anregenden Kraft (Impulshammer) wird die Struktur zu Schwingungen angeregt. Um die Schwingung der einzelnen Masseelemente berechnen zu können, ist ein Differenzialgleichungssystem aufzustellen. Zuerst wird die Kopplung der beiden Massen m_1 und m_2 erläutert, um dann die Systembeschreibung der drei gekoppelten Massen anzugeben.

In **Bild 3** sind zwei Massen über eine Feder mit der Federkonstanten k_1 miteinander verbunden.

Für die Masse m_1 ergibt sich aus der Summe der angreifenden Kräfte:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_1 \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

Für die Masse m_2 lässt sich analog das Kräftegleichgewicht ermitteln:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_1 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

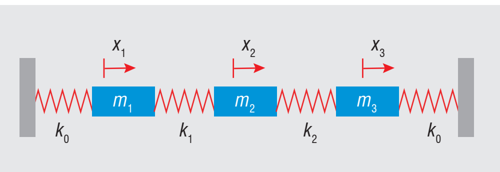

Bild 2: Eindimensionales Modell einer eingespannten Welle

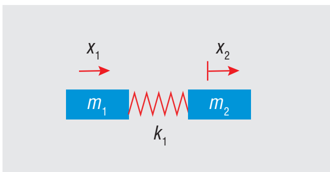

Bild 3: Teilmodell 1